ЛЕКЦИЯ № 18

Нелинейный параметрический резонанс.

Перейдем к рассмотрению нелинейного параметрического резонанса. Комбинируя уравнение (12.2), описывающее линейный параметрический резонанс и уравнениеДюффинга (16.6) с четверной нелинейностью, получаем простейшую модель, описывающую нелинейный параметрический резонанс:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left(1 + h\cos(\omega t)\right)x + \varepsilon x^3 = 0. \qquad (18.1)$$

(Выбрана «жесткая» нелинейность для сравнения с результатами предыдущей лекции для обычного нелинейного резонанса).

Ограничимся частным случаем одночастотных колебаний у основного параметрического резонанса, которые рассмотри в резонансном приближении. Как и при исследовании линейного резонанса, решение будем искать в виде $x = a_1 \cos(\omega t/2) + a_2 \sin(\omega t/2)$. Вначале рассмотрим одночастотные решения, полагая амплитуды a и b постоянными. Подставляя такое решение в (18.1) в резонансном приближении получаем систему уравнений

$$\left(\omega_0^2 - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 \pm \frac{\omega_0^2 h}{2}\right)a_{1,2} + \frac{3}{4}\varepsilon a_{1,2}\left(a_1^2 + a_2^2\right) = 0. \qquad (18.2)$$

Она имеет два решения:

$$a_1 = 0, \qquad \omega^2 = (2\omega_0)^2 + 2\omega_0^2 h + 3\varepsilon a_2^2, \qquad (18.3)$$

$$a_2 = 0, \qquad \omega^2 = (2\omega_0)^2 - 2\omega_0^2 h + 3\varepsilon a_1^2. \qquad (18.4)$$

Таким образом, при фиксированной величине внешнего поля h зависимость частоты колебаний от «мощности» колебаний a^2 выглядит так, как это изображено на Рис.18.1.

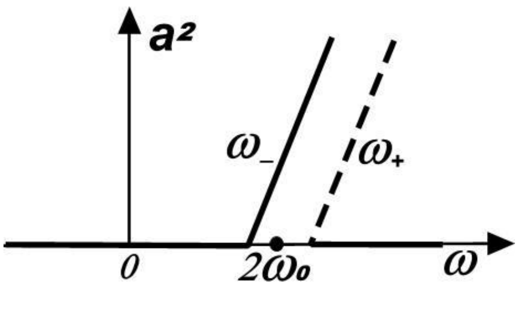

Рис.18.1

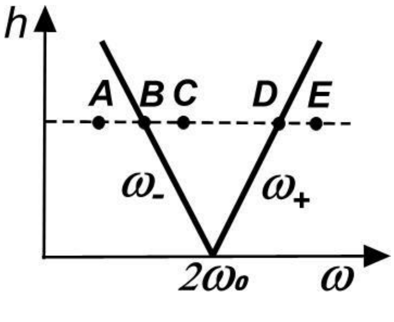

Рис.18.2

Рассмотрим эту проблему в более простой модели для комплексной переменной. Комбинируя уравнение для линейного параметрического резонанса (13.2) и уравнение ангармонического ротатора (или магнитного момента) (16.24), получаем эффективное уравнение для описания нелинейного параметрического резонанса. Опять, для удобства сравнения с результатами для обычного резонанса в уравнении ангармонического осциллятора учтем «жесткую» нелинейность:

$$i\dot{\psi} - \omega_0\psi - \varepsilon|\psi|^2\psi - \omega_0 h\overline{\psi}\, e^{-i\omega t} = 0 \tag{18.5}$$

После перехода во вращающуюся систему отсчета $\psi = \varphi\exp(-i\omega t/2)$ получаем уравнение с постоянными коэффициентами:

$$i\dot{\varphi} - (\omega_0 - \omega/2)\varphi - \varepsilon|\varphi|^2\varphi - \omega_0 h\overline{\varphi} = 0\,. \tag{18.6}$$

Представив комплексную переменную φ в виде $\varphi = a\exp(i\delta)$, получаем систему уравнений первого порядка

$$\dot{a} = -\omega_0 h\, a\sin 2\delta\,, \tag{18.7}$$

$$\dot{\delta} = (\omega/2 - \omega_0) - \varepsilon\, a^2 - \omega_0 h\cos 2\delta\,. \tag{18.8}$$

Стационарным состояниям соответствует $\dot{a} = \dot{\delta} = 0$. При этом мы получаем два состояния с $\delta = 0$ и $\delta = \pi/2$ и с частотными зависимостями

$$\omega_{1,2} = 2\omega_0 + \varepsilon\, a^2 \pm 2\omega_0 h\,, \tag{18.9}$$

изображенными на Рис.18.1 в виде линий $\omega_\pm$. Одновременно стационарным состояниям отвечают особые точки на «фазовой» плоскости (a,δ). Систему (18.7, 18.8) легко исследовать на фазовой плоскости, поскольку она обладает интегралом движения и является полностью интегрируемой. Легко проверить сохранение следующей величины:

$$E = a^2\left(\omega_0 - \omega/2 + \omega_0 h\cos 2\delta - \varepsilon\, a^2/2\right). \tag{18.9}$$

Рассмотрим трансформацию фазового портрета системы на плоскости (a,δ) при фиксированном значении глубины модуляции h и с ростом частоты вдоль линии AE гна Рис.18.2. Прежде всего определим особые точки. Из (18.7) следует, что они могут лежать только на прямых линиях $a = 0$, и $\delta = \pi n/2$. При $\omega < \omega_- = 2\omega_0 - 2\omega_0 h$ (точка A на рисунке) правые части (18.7, 18.8) не зануляются одновременно. Следовательно, особые точки отсутствуют. Характер движения можно оценить при малых амплитудвх a и частотах $\omega << 2\omega_0$. При этом из (18.8) следует, что $\dot{\delta} \approx -\omega/2$ и $\delta \approx -\omega t/2$. Заметим, что при этом $\psi = a\exp(-i\omega t/2 + i\delta) = a\exp(-i\omega t)$, т.е. как отмечалось ранее, частица колеблется на частоте внешней силы. Представляя амплитуду в виде $a = \tilde{a} + \mu$, для малых отклонений μ получаем из (18.7) $a = \tilde{a} - (\omega_0 \tilde{a} h/\omega)\cos\omega t = \tilde{a} - (\omega_0 \tilde{a} h/\omega)\cos 2\delta$. Таким образом, восстанавливается фазовый портрет в этой области (Рис.18.3а).

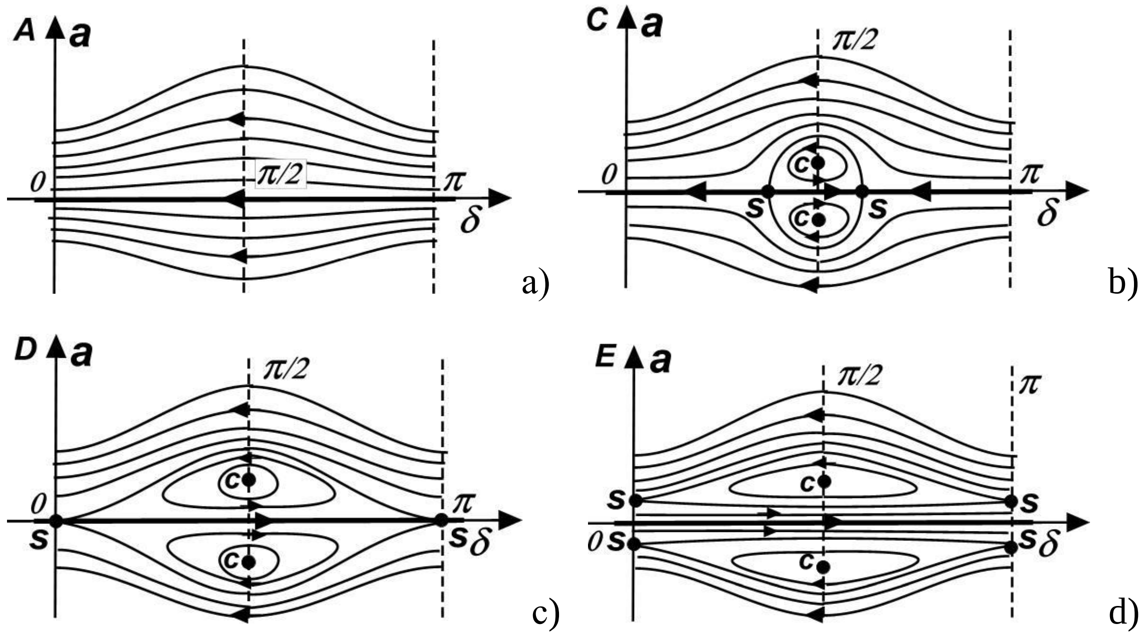

Рис.18.3

В точке B на Рис.13.2 возникает особая точка $(a = 0, \delta = \pi/2)$. Этот процесс необычный. Как правило, особые точки рождаются попарно – центр и седло. В данном случае рождается сразу 4 особые точки: два центра и два седла. При малом превышении частотой величины ω_- имеем $a << 1$ и $\delta = \pi/2 + \nu$ и правая часть (18.8) принимает вид $-\varepsilon a^2 - 2\omega_0 h \nu^2 + (\omega - \omega_-)/2$. Приравнивая это выражение нулю, получаем эллипс, пересечение которого с прямыми $a = 0$ и $\delta = \pi/2$ дают возникающие особые точки $\left(a_c = \pm\sqrt{(\omega - \omega_-)/2\varepsilon}, \delta_c = \pi/2\right)$ и $(a_s = 0, \delta_s = \pi/2 \pm \nu)$ с $\nu_s = \sqrt{(\omega - \omega_-)/4\omega_0 h}$. Линеаризация уравнений (18.7, 18.8) вблизи точек s с $a = a_c + \eta$, $\delta = \pi/2 + \nu$ дает

$$\dot{\eta} = 2\omega_0 a_c h \nu, \qquad \dot{\nu} = -2\varepsilon a_c \eta. \tag{18.10}$$

Т.е. эти точки являются устойчивыми центрами и решения вида $\nu, \eta \sim \exp(i\Omega t)$ описывают вращение изображающих точек с частотой $\Omega = \sqrt{4\varepsilon\omega_0 a_c^2 h}$. Таим образом, общее решение имеет вид

$$\psi \approx (a_c + \eta_0 \sin \Omega t)\exp(-i\omega t/2 - i\eta_0 \Omega \cos \Omega t / 2\omega_0 a_c h), \qquad (18.11)$$

т.е. является двухчастотным с комбинацией частот ω и Ω.

Линеаризация уравнений вблизи двух других точек $a = 0$, $\delta = \pi/2 + \nu_s + \xi$ показывает, что эти точки представляют собой неустойчивые седла, описываемые уравнениями

$$\dot{\xi} = -2\omega_0 h \sin 2\nu_s \cdot \xi, \qquad \dot{a} = -\omega_0 h \sin 2\nu_s \cdot a \qquad (18.12)$$

с решениями $\xi \sim \exp(-2\Gamma t)$ и $a \sim \exp(-\Gamma t)$ с $\Gamma = h\omega_0 \sin 2\nu_s$. Фазовый портрет в точке C на Рис.18.2 приведен на Рис.18.3b. Точное выражение для координаты седловой точки такое: $\nu_s = \arcsin\sqrt{(\omega - \omega_-)/4\omega_0 h}$, и она с ростом частоты ω и приближении ее к ω_+ стремится к $\pi/2$. При значнии $\omega = \omega_+$ (точка D на Рис.18.2) происходит слияние двух седел (Рис.18.3c) и рождение двух новых седел (Рис.18.3d).

Проведенный анализ показывает, что учет нелинейности стабилизирует нелинейный параметрический резонанс и ограничивает эспоненциальный рост амплитуды при внешнем воздействии. Кроме того, одночастотное стационарное колебаний с частотами ω_+ неустойчиво. Движение осциллятора в условии резонанса представляет собой следующее. При частота, меньших резонансных $(\omega < \omega_-)$, осциллятор испытывает дополнительное вращение в направлении вращения внешнего поля. При частотах в интервале резонансных $(\omega_- < \omega < \omega_+)$, кроме такого движения при определенных начальных условиях допустимо периодическое колебание момента со своей частотой относительно среднего вращения с частотой, равной половине внешней частоты. Т.е. это – колебания относительно вращения с частотой, близкой к собственной. Наконец, при частотах, больших ω_-, коме указанных решений возможны состояния, в которых появляется дополнительное вращение в обратном направлении по отношению к вращению поля (система тормозится при больших скоростях).

Учесть затухание в в условиях нелинейного параметрического резонанса можно, как и в предыдущих задачах, заменой $\omega_0 \to \omega_0 - i\lambda$. При этом система уравнений (18.7, 18.8) заменится на

$$\dot{a} = -\lambda a - \omega_0 h a \sin 2\delta, \qquad (18.7)$$

$$\dot{\delta} = (\omega/2 - \omega_0) - \varepsilon a^2 - \omega_0 h \cos 2\delta. \qquad (18.8)$$

Рассмотрим, как изменится динамика в области резонанса, т.е. при $\omega_- < \omega < \omega_+$. (При учете диссипации граничные частоты несколько изменятся и их интервал сузится). Координаты особой точки (c) несколько изменятся:

$$\sin 2\delta_c = -\lambda / \omega_0 h , \qquad 2\varepsilon a_c^2 = \omega - 2\omega_0 - 2\sqrt{(\omega_0 h)^2 - \lambda^2} . \tag{18.9}$$

Линеаризуя уравнения (18.7, 18.8) вблизи этой точки по малым добавкам $\eta = a - a_c$ и $\nu = \delta - \delta_0$, получаем при малых значениях затухания вместо (18.10) систему

$$\dot{\eta} = 2\omega_0 a_c h\nu - \lambda\eta , \qquad \dot{\nu} = -2\varepsilon a_c \eta - 2\lambda\nu . \tag{18.10}$$

Для решений вида $\eta, \nu \sim \exp(i\Omega t)$ получаем

$$\Omega \approx \sqrt{4\varepsilon a_s^2 \omega_0 h} + i3\lambda / 2 . \tag{18.11}$$

Таким образом, особая точка из центра превращается в устойчивый фокус (Рис.18.4).

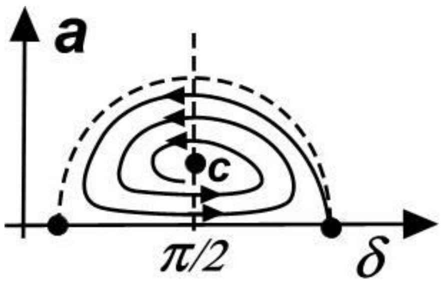

Рис.18.4

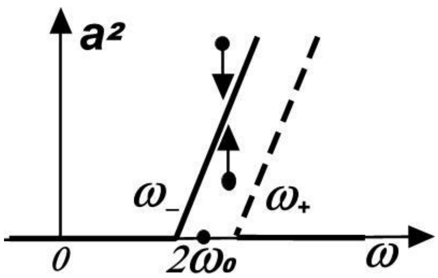

Рис.18.5

Поэтому, если при фиксированной глубине накачки h и частоте внешнего поля ω задать аплитуду колебания, то под влиянием трения амплитуда понизится (или повысится) до значения, определяемого зависимостью ω_- (Рис.18.5).